§1. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ

КАК РЕШАТЬ?

Производную следует находить по формуле: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Показатель степени n может быть целым или дробным. Если перед $\boldsymbol{x}$ стоит коэффициент (число), то он умножается на производную: $(kx^n)' = knx^{n-1}$. Производная константы (обычного числа) равна нулю: $(k)' = 0$. Производная суммы (разности) это сумма (разность) производных. Иррациональную часть (корни m-й степени), как правило, удобно представлять в виде показателя: $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$. В частности: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

ПРИМЕР 1

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - x^2 - 40x + 3$ на отрезке [0;6].

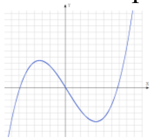
РЕШЕНИЕ: Чтобы найти наименьшее/наибольшее значение функции на определённом отрезке, нужно знать: попадают ли в этот отрезок какие-либо экстремумы функции. Для этого нужно взять производную этой функции и приравнять к нулю, т.к. в точках экстремумов производная равна 0:

$y' = 3x^2 - 2x - 40$.

$$3x^2 - 2x - 40 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -\frac{10}{3} \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Это означает, что в точках $-\frac{10}{3}$ и 4 находятся экстремумы функции, но в какой из них максимум, а в какой минимум - пока неизвестно. Далее есть 3 основных способа решения:

а) Проанализировать форму графика функции, исходя из коэффициентов, и сделать вывод о том какой экстремум является максимумом, а какой минимумом.



Здесь вторая точка (x = 4) будет минимумом, значит наименьшее значение $f(4) = -109$.

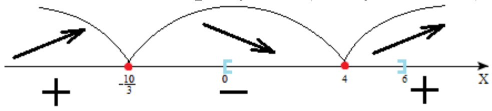
б) Просто поочерёдно подставить в функцию границы отрезка и попадающие в него экстремумы. Из полученных результатов выбрать наименьший/наибольший (в зависимости от задания).

$f(0) = 3$
$f(4) = -109$ => наименьшее значение $f(4) = -109$.
$f(6) = -57$

в) Нанести на числовую ось все имеющиеся точки и проанализировать отдельные промежутки:

Числа 0 и 6 - просто заданные границы и не участвуют в исследовании промежутков!

Выбираем из **первого** промежутка любое «удобное» значение и подставляем в ПРОИЗВОДНУЮ.
$f'(-10) = 3\cdot(-10)^2 - 2\cdot(-10) - 40 = 280$ => $f'(-10) > 0$ => функция на этом промежутке **возрастает**.
Выбираем из **второго** промежутка любое «удобное» значение и подставляем в ПРОИЗВОДНУЮ.
$f'(0) = 3\cdot0 - 2\cdot0 - 40 = -40$ => $f'(0) < 0$ => функция на этом промежутке **убывает**.
Выбираем из **третьего** промежутка любое «удобное» значение и подставляем в ПРОИЗВОДНУЮ.
$f'(10) = 3\cdot100 - 2\cdot10 - 40 = 240$ => $f'(10) > 0$ => функция на этом промежутке **возрастает**.
Обозначаем на рисунке (для удобства) промежутки возрастания и убывания стрелочками.



По этой схеме видно, что точка 4, которая попадает в заданный отрезок, является точкой минимума. Следовательно, именно в этой точке функция принимает наименьшее значение и ответом к заданию будет $f(4) = -109$

`Ответ: -109`

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Берём производную и приравниваем её к нулю, решаем. Корни получившегося уравнения, которые попадают в отрезок, и границы самого отрезка подставляем их в функцию. Из получившихся значений выбираем наименьшее или наибольшее (зависит от задания). Это ответ.

1.1

Найдите точку максимума функции
$y = x^3 - 48x + 17$.

Ответ:

1.2

Найдите наименьшее значение функции
$y = x^3 - 27x$ на отрезке [0;4].

Ответ:

1.3

Найдите наибольшее значение функции
$y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке [-2;0].

Ответ:

1.4

Найдите точку максимума функции
$y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ответ:

1.5

Найдите точку минимума функции
$y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ответ:

1.6

Найдите наименьшее значение функции
$y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке [1;4].

Ответ:

1.7

Найдите наибольшее значение функции
$y = x^3 - 6x^2$ на отрезке [-3;3].

Ответ:

1.8

Найдите точку максимума функции
$y = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

Ответ:

1.9

Найдите точку минимума функции
$y = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

Ответ:

1.10

Найдите наименьшее значение функции
$y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке [1;4].

Ответ:

1.11

Найдите наибольшее значение функции
$y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ на отрезке [-4;-1].

Ответ:

1.12

Найдите точку максимума функции
$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$.

Ответ:

1.13

Найдите точку минимума функции
$y = x^3 + 5x^2 + 7x - 5$.

Ответ:

1.14

Найдите наименьшее значение функции
$y = x^3 - x^2 - 40x + 3$ на отрезке [0;4].

Ответ:

1.15

Найдите наибольшее значение функции
$y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ на отрезке [-2;0].

Ответ:

1.16

Найдите точку максимума функции
$y = 7 + 12x - x^3$.

Ответ:

1.17

Найдите точку минимума функции
$y = 7 + 12x - x^3$.

Ответ:

1.18

Найдите наименьшее значение функции
$y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке [-2;2].

Ответ:

1.19

Найдите наибольшее значение функции
$y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке [-2;2].

Ответ:

1.20

Найдите точку максимума функции
$y = 9x^2 - x^3$.

Ответ:

1.21

Найдите точку минимума функции

$y=\frac{x^3}{3}-9x-7$.

Ответ:

1.22

Найдите наибольшее значение функции

$y=5+9x-\frac{x^3}{3}$ на отрезке [-3;3].

Ответ:

1.23

Найдите наибольшее значение функции

$y=9x^2-x^3$ на отрезке [2;10].

Ответ:

1.24

Найдите точку максимума функции

$y=\frac{x^3}{3}-9x-7$.

Ответ:

1.25

Найдите точку минимума функции

$y=9x^2-x^3$.

Ответ:

1.26

Найдите наименьшее значение функции

$y=\frac{x^3}{3}-9x-7$ на отрезке [-3;3].

Ответ:

1.27

Найдите наибольшее значение функции

$y=\frac{x^3}{3}-9x-7$ на отрезке [-3;3].

Ответ:

1.28

Найдите точку максимума функции

$y=5+9x-\frac{x^3}{3}$.

Ответ:

1.29

Найдите точку минимума функции

$y=5+9x-\frac{x^3}{3}$.

Ответ:

1.30

Найдите наименьшее значение функции

$y=9x^2-x^3$ на отрезке [-1;5].

Ответ:

1.31

Найдите наименьшее значение функции

$y=2x^{\frac{3}{2}}-6x+5$ на отрезке [1;8].

Ответ:

1.32

Найдите точку минимума функции

$y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$.

Ответ:

1.33

Найдите наименьшее значение функции

$y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$ на отрезке [1;9].

Ответ:

1.34

Найдите точку минимума функции

$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+1$.

Ответ:

1.35

Найдите наименьшее значение функции

$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+1$ на отрезке [1;9].

Ответ:

1.36

Найдите точку максимума функции

$y=7+6x-2x^{\frac{3}{2}}$.

Ответ:

1.37

Найдите наибольшее значение функции

$y=3x-2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке [0;7].

Ответ:

1.38

Найдите точку максимума функции

$y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+1$.

Ответ:

1.39

Найдите наибольшее значение функции

$y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+1$ на отрезке [1;9].

Ответ:

1.40

Найдите точку минимума функции

$y=2x^{\frac{3}{2}}-6x+5$.

Ответ:

1.41
Найдите наименьшее значение функции
$y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке [1;9].
Ответ:

1.42
Найдите точку минимума функции
$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$
Ответ:

1.43
Найдите наименьшее значение функции
$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке [1;9].
Ответ:

1.44
Найдите точку максимума функции
$y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}.$
Ответ:

1.45
Найдите наибольшее значение функции
$y = 3x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке [0;4].
Ответ:

1.46
Найдите точку максимума функции
$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1.$
Ответ:

1.47
Найдите наибольшее значение функции
$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1$ на отрезке [1;9].
Ответ:

1.48
Найдите наибольшее значение функции
$y = x^3 - 6,5x^2 + 14x - 14$ на отрезке [-4;3].
Ответ:

1.49
Найдите точку минимума функции
$y = -21x^2 - x^3 + 32.$
Ответ:

1.50
Найдите наибольшее значение функции
$y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке [-6;1].
Ответ:

1.51
Найдите наибольшее значение функции
$y = 3x^5 - 20x^3 - 54$ на отрезке [-4;-1].
Ответ:

1.52
Найдите наибольшее значение функции
$y = 3 + 27x - x^3$ на отрезке [−3;3].
Ответ:

1.53
Найдите наибольшее значение функции
$y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке [-2;0].
Ответ:

1.54
Найдите наибольшее значение функции
$y = x^7 + 5x^3 - 16$ на отрезке [-9;1].
Ответ:

1.55
Найдите наименьшее значение функции
$y = 15 + 12x + x^3$ на отрезке [−2; 2].
Ответ:

1.56
Найдите точку минимума функции
$y = x^{\frac{3}{2}} - 18x + 29.$
Ответ:

1.57
Найдите точку минимума функции
$y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 11.$
Ответ:

1.58
Найдите наименьшее значение функции
$y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 11.$
Ответ:

1.59
Найдите наибольшее значение функции
$y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 11$ на отрезке [0;400].
Ответ:

1.60
Найдите наибольшее значение функции
$y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 11$ на отрезке [0;576].
Ответ:

ПРИМЕР 2

Найдите наибольшее значение функции $y = 12\sin x - 6\sqrt{3}x + \sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

РЕШЕНИЕ:

Сначала нужно выяснить: попадают ли экстремумы функции в заданный промежуток. Для этого найдём производную функции и приравняем её к нулю. Производные некоторых функций представлены в таблице ниже.

Таблица производных (часть 1)

f (x)	C=const	x	Cx	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
f′ (x)	0	1	C	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$y' = 12\cos x - 6\sqrt{3}$; $12\cos x - 6\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

В заданный отрезок попадает только корень $\frac{\pi}{6}$, так что можно найти значения функции в этой точке и границах заданного отрезка. Затем выбрать из них наибольшее значение функции.

$y(0) = 12\sin 0 - 6\sqrt{3}\cdot 0 + \sqrt{3}\pi + 6 = \sqrt{3}\pi + 6$

$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12\sin\frac{\pi}{6} - 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\pi + 6 = 12\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{3}\pi + \sqrt{3}\pi + 6 = 12$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\sin\frac{\pi}{2} - 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\pi + 6 = 12 - 3\sqrt{3}\pi + \sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi$

С помощью метода неравенств определяем, что наибольшим значением является 12.

Ответ: 12

Примечание. Если сравнение значений функции и определение наибольшего из них представляется достаточно сложным, то можно определить максимумом или минимумом является экстремум, попадающий в заданный отрезок и сделать вывод на основе этого.

1.61

Найдите наибольшее значение функции

$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:

1.62

Найдите наибольшее значение функции

$y = 14x - 7\operatorname{tg} x - 3{,}5\pi + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ:

1.63

Найдите наименьшее значение функции

$y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ:

1.64

Найдите наименьшее значение функции

$y = 5\sin x + \frac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Ответ:

1.65

Найдите наименьшее значение функции

$y = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5x - 5\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:

1.66

Найдите наименьшее значение функции

$y = 7\sin x - 8x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ:

1.67

Найдите наименьшее значение функции

$y = 6\cos x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Ответ:

1.68

Найдите наибольшее значение функции

$y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$

Ответ:

1.69
Найдите наименьшее значение функции
$y = 9\cos x + 14x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.
Ответ:

1.70
Найдите наибольшее значение функции
$y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
Ответ:

1.71
Найдите наибольшее значение функции
$y = 3\operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.
Ответ:

1.72
Найдите наименьшее значение функции
$y = 5\operatorname{tg} x - 5x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
Ответ:

1.73
Найдите наибольшее значение функции
$y = 16\operatorname{tg} x - 16x + 4\pi - 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
Ответ:

1.74
Найдите наибольшее значение функции
$y = 4\operatorname{tg} x - 4x - \pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
Ответ:

1.75
Найдите наибольшее значение функции
$y = 3x - 3\operatorname{tg} x - 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
Ответ:

1.76
Найдите наименьшее значение функции
$y = 4x - 4\operatorname{tg} x + 12$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.
Ответ:

1.77
Найдите наименьшее значение функции
$y = 2\operatorname{tg} x - 4x + \pi - 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
Ответ:

1.78
Найдите наибольшее значение функции
$y = 2\cos x - \frac{18}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.
Ответ:

1.79
Найдите наибольшее значение функции
$y = 7\cos x + 16x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.
Ответ:

1.80
Найдите наименьшее значение функции
$y = 13x - 9\sin x + 9$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Ответ:

1.81
Найдите наибольшее значение функции
$y = -2\operatorname{tg} x + 4x - \pi - 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
Ответ:

1.82
Найдите наименьшее значение функции
$y = -14x + 7\operatorname{tg} x + \frac{7\pi}{2} + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
Ответ:

1.83
Найдите наибольшее значение функции
$y = 4\cos x - 20x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.
Ответ:

1.84
Найдите наибольшее значение функции
$y = 5\sin x - 6x + 3$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Ответ:

1.85
Найдите наименьшее значение функции
$y = 3 - \frac{5\pi}{4} + 5x - 5\sqrt{2}\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Ответ:

1.86
Найдите наибольшее значение функции
$y = 5\sin x + \frac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.
Ответ:

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

КАК РЕШАТЬ?
Производную следует находить по формулам, согласно таблице производных.

Таблица производных (часть 2)

f (x)	a^x	e^x	e^{nx}	e^{n-x}	$\log_a x$	$\ln x$	$\ln(nx)$	$\ln(x+n)$
f′ (x)	$a^x \ln a$	e^x	ne^{nx}	$-e^{n-x}$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+n}$

Сложной называют такую функцию, внутри которой содержится ещё одна функция. Например,
функция $y=\sqrt{2x+3}$ состоит из «внешней» функции $y=\sqrt{x}$ и «внутренней» $y=2x+3$;
функция $y=\cos(x^2-4x)$ состоит из «внешней» $y=\cos(x)$ и «внутренней» $y=x^2-4x$;
функция $y=\ln(2x+5)$ состоит из «внешней» функциии$y=\ln(x)$ и «внутренней» $y=2x+5$;
функция $y=e^{7-x}$ состоит из «внешней» функции $y=e^x$ и «внутренней» $y=7-x$;
функция $y=(x+2)^5$ состоит из «внешней» функции $y=x^5$ и «внутренней» $y=x+2$.

Чтобы найти производную сложной функции, нужно найти производную «внешней» функции и умножить её на производную «внутренней» функции. Например,
функция $y=(2x-7)^4$, а производная $y'=4(2x-7)^3\cdot(2x-7)'=4(2x-7)^3\cdot 2=8(2x-7)^3$;
функция $y=\cos(3x^2-6)$, а производная $y'=-\sin(3x^2-6)\cdot 6x=-6x\cdot\sin(3x^2-6)$;
функция $y=e^{20-2x}$, а производная $y'=e^{20-2x}\cdot(20-2x)'=-2e^{20-2x}$;
функция $y=\ln(5x-1)$, а производная $y'=\frac{1}{5x-1}\cdot(5x-1)'=\frac{5}{5x-1}$.

ПРИМЕР 1
Найдите наименьшее значение функции $y=e^{2x}-6e^x+3$ на отрезке [1;2].
РЕШЕНИЕ:
Следует различать два разных вопроса, которые попадаются в таких заданиях!
1) Найти точку максимума/минимума - в ответ записывается абсцисса;
2) Найти наибольшее/наименьшее значение функции - в ответ записывается ордината.
Чтобы найти наименьшее/наибольшее значение функции на определённом отрезке, нужно знать: попадают ли в этот отрезок какие-либо экстремумы функции. Для этого нужно взять производную этой функции и приравнять к нулю, т.к. в точках экстремума производная равна 0:
$y'=2e^{2x}-6e^x$
$$2e^{2x}-6e^x=0 <=> e^x(2e^x-6)=0 <=> \left[\begin{array}{l} e^x=0 \\ 2e^x-6=0 \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} x\in\emptyset \\ e^x=3 \end{array}\right. <=> x=\ln 3.$$

В данном случае экстремум находится в точке с абсциссой **ln 3**. Эта точка попадает в отрезок [1;2] и является минимумом функции. Следовательно, именно в ней и будет **наименьшее значение функции** в данном отрезке:
$$y(\ln 3)=e^{2\ln 3}-6e^{\ln 3}+3=3^2-6\cdot 3+3=-6$$

Ответ: -6

Примечание. Здесь можно было подставлять не ***x*** (который равен **ln 3**), а ***e****ˣ* (которая равна **3**). Тогда вычисления были бы чуть проще.

<u>**УПРОЩЕНИЕ:**</u> Берём производную и приравниваем её к нулю, решаем. Берём корни получившегося уравнения, которые попадают в отрезок, и границы самого отрезка; поочерёдно подставляем их в функцию. Из получившихся значений выбираем наименьшее. Это ответ.

2.1
Найдите точку минимума функции
$y=4x-4\ln(x+7)$.
Ответ:

2.2
Найдите наибольшее значение функции
$y=\ln(x+5)^5-5x$ на отрезке $[-4{,}5;\ 0]$.
Ответ:

2.3
Найдите наименьшее значение функции
$y=9x-\ln(9x)+3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$.
Ответ:

2.4
Найдите наибольшее значение функции
$y=8\ln(x+7)-8x+3$ на отрезке [-6,5;0].
Ответ:

2.5
Найдите наименьшее значение функции
$y=4x-4\ln(x+7)+6$ на отрезке [-6,5;0].
Ответ:

2.6
Найдите наибольшее значение функции
$y=\ln(11x)-11x+9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22};\frac{5}{22}\right]$.
Ответ:

2.7
Найдите точку максимума функции
$y=\ln(x+5)-2x+9$.
Ответ:

2.8
Найдите точку минимума функции
$y=2x-\ln(x+3)+7$.
Ответ:

2.9
Найдите точку минимума функции
$y=3x-\ln(x+3)^3$.
Ответ:

2.10
Найдите точку максимума функции
$y=\ln(x+5)^5-5x$.
Ответ:

2.11
Найдите точку максимума функции
$y=2x^2-13x+9\ln x+8$.
Ответ:

2.12
Найдите наименьшее значение функции
$y=4x^2-10x+2\ln x-5$ на отрезке $[0{,}3;\ 3]$.
Ответ:

2.13
Найдите точку минимума функции
$y=2x^2-5x+\ln x-3$.
Ответ:

2.14
Найдите точку максимума функции
$y=8\ln(x+7)-8x+3$.
Ответ:

2.15
Найдите точку максимума функции
$y=\ln(x+4)^2+2x+7$.
Ответ:

2.16
Найдите точку максимума функции
$y=2\ln(x+4)^3-8x-19$.
Ответ:

2.17
Найдите точку максимума функции
$y=0{,}5x^2-7x+12\ln x+8$.
Ответ:

2.18
Найдите наименьшее значение функции
$y=3x-\ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2{,}5;\ 0]$.
Ответ:

2.19
Найдите наибольшее значение функции
$y=2x^2-13x+9\ln x+8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$.
Ответ:

2.20
Найдите наименьшее значение функции
$y=2x^2-5x+\ln x-3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right]$.
Ответ:

ПРИМЕР 2
Найдите наименьшее значение функции $y = (x-8)e^{x-7}$ на отрезке [6;8].
РЕШЕНИЕ:
В данном случае функция $y = f(x)$ состоит из произведения двух функций: $U(x) = x–8$ и $V(x) = e^{x–7}$, одна из которых, к тому же является сложной. Значит нужно использовать формулу для производной произведения:

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$y' = \left((x-8) \cdot e^{x-7}\right)' = (x-8)' \cdot e^{x-7} + (x-8) \cdot (e^{x-7})' = 1 \cdot e^{x-7} + (x-8) \cdot e^{x-7} =$
$= e^{x-7} + xe^{x-7} - 8e^{x-7} = e^{x-7}(x-7).$
Далее приравниваем производную к нулю $e^{x-7}(x-7) = 0$ и определяем точку экстремума $x = 7$.
Поочерёдно подставляем границы отрезка и точку экстремума в **функцию**:

$$y(6) = -\frac{2}{e};\ y(7) = -1;\ y(8) = 0.$$

Выбираем наименьшее значение, которое и будет являться ответом.
Ответ: -1

ПРИМЕР 3
Найдите наибольшее значение функции $y = (x-2)^2(x-4) + 5$ на отрезке [1;3].
РЕШЕНИЕ:
Здесь тоже присутствует произведение функций, первая из которых является сложной. Для нахождения производной можно использовать формулу для производной произведения. Однако в данном случае лучше сначала преобразовать саму функцию, а потом брать производную:

$$y = (x-2)^2(x-4) + 5 = (x^2 - 4x + 4)(x-4) + 5 = x^3 - 8x^2 + 20x - 11$$

Теперь не требуется использовать формулу производной произведения.

$$y' = 3x^2 - 16x + 20$$

Приравниваем к нулю и находим корни получившегося уравнения, которые и будут являться точками экстремума исходной функции. Точка $x = 2$ попадает в заданный отрезок и является максимумом функции. Следовательно, остаётся только посчитать $y(2) = 5$.
Ответ: 5

2.21
Найдите точку минимума функции
$y = (x+16)e^{x-16}$.
Ответ:

2.22
Найдите точку минимума функции
$y = (3-x)e^{3-x}$.
Ответ:

2.23
Найдите точку максимума функции
$y = (9-x)e^{x+9}$.
Ответ:

2.24
Найдите точку максимума функции
$y = (x+16)e^{16-x}$.
Ответ:

2.25
Найдите точку минимума функции
$y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.
Ответ:

2.26
Найдите точку максимума функции
$y = (x-2)^2 e^{x-6}$.
Ответ:

2.27
Найдите точку максимума функции
$y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.
Ответ:

2.28
Найдите точку максимума функции
$y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x+36}$.
Ответ:

2.29
Найдите наименьшее значение функции
$y=(x+3)^2(x+5)-1$ на отрезке [-4;-1].
Ответ:

2.30
Найдите наименьшее значение функции
$y=(8-x)e^{9-x}$ на отрезке [3;10].
Ответ:

2.31
Найдите точку минимума функции
$y=(x+3)^2e^{2-x}$.
Ответ:

2.32
Найдите точку минимума функции
$y=(x^2-8x+8)e^{6-x}$.
Ответ:

2.33
Найдите точку максимума функции
$y=(x+6)^2e^{4-x}$.
Ответ:

2.34
Найдите наибольшее значение функции
$y=(8-x)e^{x-7}$ на отрезке [3;10].
Ответ:

2.35
Найдите наибольшее значение функции
$y=(x-9)e^{10-x}$ на отрезке [-11;11].
Ответ:

2.36
Найдите наименьшее значение функции
$y=(3x^2-36x+36)e^{x-10}$ на отрезке [8;11].
Ответ:

2.37
Найдите наибольшее значение функции
$y=(3x^2-36x+36)e^{x}$ на отрезке [-1;4].
Ответ:

2.38
Найдите наименьшее значение функции
$y=(x^2-8x+8)e^{2-x}$ на отрезке [1;7].
Ответ:

2.39
Найдите наибольшее значение функции
$y=(x^2-10x+10)e^{10-x}$ на отрезке [5;11].
Ответ:

2.40
Найдите наименьшее значение функции
$y=(x-2)^2e^{x-2}$ на отрезке [1;4].
Ответ:

2.41
Найдите наибольшее значение функции
$y=(x-2)^2e^{x}$ на отрезке [-5;1].
Ответ:

2.42
Найдите наименьшее значение функции
$y=(x+3)^2e^{-3-x}$ на отрезке [-5;-1].
Ответ:

2.43
Найдите наибольшее значение функции
$y=(x+6)^2e^{-4-x}$ на отрезке [-6;-1].
Ответ:

2.44
Найдите точку максимума функции
$y=(x-2)^2(x-4)+5$.
Ответ:

2.45
Найдите точку минимума функции
$y=(x+3)^2(x+5)-1$.
Ответ:

2.46
Найдите точку минимума функции
$y=(x-2)^2e^{x-5}$.
Ответ:

ПРИМЕР 4

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10; -1].

РЕШЕНИЕ:

В данном случае функция $y = f(x)$ состоит из частного двух функций: $U(x) = x^2+25$ и $V(x) = x$. Значит нужно использовать формулу для производной частного:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$$

$$y' = \frac{(x^2+25)' \cdot x - (x^2+25) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2+25)}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2}$$

Далее приравниваем производную к нулю и определяем точки экстремума $x = -5$ и $x = 5$. В отрезок попадает только точка $x = -5$ и она является максимумом. Значит, именно в этой точке функция будет принимать наибольшее значение на заданном отрезке. Вычисляем $y(-5) = -10$.

Ответ: -10

ПРИМЕР 5

Найдите точку максимума функции $y = \frac{98}{x} + 2x + 15$.

РЕШЕНИЕ:

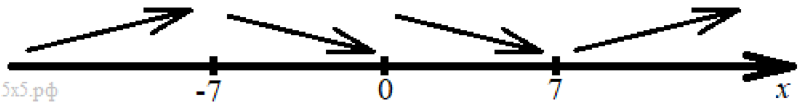
Так как нам нужна точка максимума, необходимо взять производную и приравнять её к нулю. Здесь можно воспользоваться формулой для производной $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, а можно немного преобразовать функцию до того, как находить производную:

$$y = \frac{98}{x} + 2x + 15 = 98 \cdot \frac{1}{x} + 2x + 15 = 98 \cdot x^{-1} + 2x + 15$$

Теперь можно воспользоваться формулой $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. В любом случае, производная будет:

$$y' = -\frac{98}{x^2} + 2$$

Приравниваем её к нулю, решаем уравнение и находим корни $x_1 = -7$, $x_2 = 7$. Определяем промежутки возрастания и убывания функции, не забывая про точку $x = 0$.



Очевидно, что функция достигает своего максимума в точке $x = -7$.

Ответ: -7

2.47

Найдите точку максимума функции

$y = -\frac{x^2+289}{x}$.

Ответ:

2.48

Найдите наименьшее значение функции

$y = \frac{x^2+25}{x}$ на отрезке [1;10].

Ответ:

2.49

Найдите точку минимума функции

$y = -\frac{x^2+1}{x}$.

Ответ:

2.50

Найдите точку максимума функции

$y = \frac{16}{x} + x + 3$.

Ответ:

2.51

Найдите наименьшее значение функции

$y = x + \frac{36}{x}$ на отрезке [1;9].

Ответ:

2.52

Найдите точку минимума функции

$y = \frac{25}{x} + x + 25$.

Ответ:

2.53
Найдите точку максимума функции
$y=-\frac{x}{x^2+289}$.
Ответ:

2.54
Найдите наибольшее значение функции
$y=x+\frac{9}{x}$ на отрезке [-4;-1].
Ответ:

2.55
Найдите точку минимума функции
$y=-\frac{x}{x^2+1}$.
Ответ:

2.56
Найдите точку минимума функции
$y=\frac{x^2+441}{x}$.
Ответ:

2.57
Найдите точку минимума функции
$y=\frac{9+x^2}{x}$.
Ответ:

2.58
Найдите наибольшее значение функции
$y=\frac{9+x^2}{x}$ на отрезке [-5;-1].
Ответ:

2.59
Найдите точку минимума функции
$y=-\frac{1024+x^2}{x}$.
Ответ:

2.60
Найдите точку максимума функции
$y=-\frac{1024+x^2}{x}$.
Ответ:

2.61
Найдите наибольшее значение функции
$y=-\frac{x}{16+x^2}$ на отрезке [-5;0].
Ответ:

2.62
Найдите наибольшее значение функции
$y=\frac{x^2+441}{x}$ на отрезке [-40;-4].
Ответ:

2.63
Найдите наибольшее значение функции
$y=\frac{x^2+484}{x}$ на отрезке [-25;-20].
Ответ:

2.64
Найдите точку максимума функции
$y=\frac{9+x^2}{x}$.
Ответ:

2.65
Найдите точку минимума функции
$y=\frac{x^2+4}{x}$.
Ответ:

2.66
Найдите точку максимума функции
$y=\frac{x^2+441}{x}$.
Ответ:

2.67
Найдите наименьшее значение функции
$y=\frac{9+x^2}{x}$ на отрезке [1;9].
Ответ:

2.68
Найдите точку минимума функции
$y=\frac{x}{x^2+16}$.
Ответ:

2.69
Найдите наименьшее значение функции
$y=\frac{x^2+441}{x}$ на отрезке [9;25].
Ответ:

2.70
Найдите точку минимума функции
$y=\frac{1}{x}+x+1$.
Ответ:

2.71
Найдите точку максимума функции
$y=\frac{1}{x}+x+1$.
Ответ:

2.72
Найдите наименьшее значение функции
$y=\frac{1}{x}+x+1$ на отрезке [0,9; 1,1].
Ответ:

ПРИМЕР 6

Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+6x+12}$.

РЕШЕНИЕ:

В данном случае можно взять производную этой (сложной) функции, приравнять к нулю и найти точку минимума: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+6x+12}}\cdot(x^2+6x+12)'=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+12}}$; $\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+12}}=0 \Rightarrow x=-3$.

Но это задание можно решить и без применения производной. Данная функция состоит из «внешней» функции $f(x)=\sqrt{g(x)}$ (которая сама по себе не имеет экстремумов) и «внутренней» $g(x)=x^2+6x+12$ (парабола с ветвями вверх). Следовательно, функция $f(x)=\sqrt{x^2+6x+12}$ будет иметь экстремумы в тех же точках, что и функция $g(x)=x^2+6x+12$ и можно исследовать только её. Так как это парабола, её вершину (следовательно, и точку минимума) можно найти по формуле $x_В=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2}=-3$. В этой точке функция $f(x)=\sqrt{x^2+6x+12}$ определена, значит в точке -3 и будет минимум этой функции.

Ответ: -3

Примечание. Функции вида $f(x)=\sqrt{g(x)}$; $f(x)=a^{g(x)}$; $f(x)=\log_a g(x)$ имеют экстремумы в тех же точках, что и $g(x)$, если сама $f(x)$ определена в этих точках.

2.73
Найдите точку максимума функции
$y=\sqrt{4-4x-x^2}$.
Ответ:

2.74
Найдите наибольшее значение функции
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+12)$ на отрезке [-19; -1].
Ответ:

2.75
Найдите наименьшее значение функции
$y=\sqrt{x^2-6x+13}$.
Ответ:

2.76
Найдите наибольшее значение функции
$y=\sqrt{5-4x-x^2}$.
Ответ:

2.77
Найдите точку максимума функции
$y=\log_2(2+2x-x^2)-2$.
Ответ:

2.78
Найдите точку минимума функции
$y=\log_5(x^2-6x+12)+2$.
Ответ:

2.79
Найдите наименьшее значение функции
$y=\log_3(x^2-6x+10)+2$.
Ответ:

2.80
Найдите точку максимума функции
$y=11^{6x-x^2}$.
Ответ:

2.81
Найдите наименьшее значение функции
$y=2^{x^2+2x+5}$.
Ответ:

2.82
Найдите точку минимума функции
$y=7^{x^2+2x+3}$.
Ответ:

2.83
Найдите наибольшее значение функции
$y=\log_5(4-2x-x^2)+3$.
Ответ:

2.84
Найдите наибольшее значение функции
$y=3^{-7-6x-x^2}$.
Ответ:

2.85
Найдите точку минимума функции
$y=\sqrt{x^2-6x+11}$.
Ответ:

2.86
Найдите наименьшее значение функции
$y=7^{x^2-2x+3}$.
Ответ:

2.87
Найдите точку максимума функции
$y=(2x-3)\cos x-2\sin x+2$,
принадлежащую промежутку $(0;2\pi)$.
Ответ:

2.88
Найдите точку минимума функции
$y=(0,5-x)\cos x+\sin x$,
принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
Ответ:

2.89
Найдите точку максимума функции
$y=(2x-3)\cos x-2\sin x+5$,
принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
Ответ:

2.90
Найдите точку минимума функции
$y=(1-2x)\cos x+2\sin x+3$,
принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
Ответ:

2.91
Найдите точку максимума функции
$y=(4x-6)\cos x-4\sin x+9$,
принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
Ответ:

2.92
Найдите наибольшее значение функции
$y=x^2(x-8)+10$ на отрезке [-9;5].
Ответ:

2.93
Найдите точку максимума функции
$y=-\frac{x}{x^2+144}$.
Ответ:

2.94
Найдите наибольшее значение функции
$y=-x^3+3x^2+9x-29$ на отрезке [-1;4].
Ответ:

2.95
Найдите наименьшее значение функции
$y=e^{2x}-14e^x+9$ на отрезке [0;2].
Ответ:

2.96
Найдите наибольшее значение функции
$y=x^5+20x^3-65x$ на отрезке [-4;0].
Ответ:

2.97
Найдите наименьшее значение функции
$y=x^5+20x^3-65x$ на отрезке [0;4].
Ответ:

2.98
Найдите точку минимума функции
$y=x^5+20x^3-65x$ на отрезке [-2;2].
Ответ:

2.99
Найдите точку максимума функции
$y=x^5+20x^3-65x$ на отрезке [-2;2].
Ответ:

2.100
Найдите наибольшее значение функции
$y=x^5+20x^3-65x$ на отрезке [-2;2].
Ответ:

2.101
Найдите наименьшее значение функции
$y=x^5+20x^3-65x$ на отрезке [-2;2].
Ответ:

2.102
Найдите точку минимума функции
$y=x^3-243x+23$.
Ответ:

2.103
Найдите точку минимума функции
$y=x^{\frac{3}{2}}-12x+18$.
Ответ:

2.104
Найдите точку минимума функции
$y=21x-\ln(x+20)^{21}$.
Ответ:

2.105
Найдите точку максимума функции
$y=\ln(x+15)^{15}-15x$.
Ответ: